

**3390.** a)  $a_{\min} = 6$ , ezt akkor veszi fel, ha  $x = \frac{\pi}{4}$ . Hozzunk közös nevezőre, alakítsuk át a következő alakúra:  $a(x) = \frac{4}{4 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x} + \frac{2}{2 \cdot \sin x \cdot \cos x} = \frac{4}{\sin^2 2x} + \frac{2}{\sin 2x}$ .

b)  $b_{\min} = 2 \cdot \sqrt{2}$ , ezt akkor veszi fel, ha  $x = \frac{\pi}{4}$ . Mivel  $b(x) > 0$  a megadott intervallumon, ezért

$$\begin{aligned} \text{pontosan ott van a minimuma, ahol a négyzetének. } b^2(x) &= \left( \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} \right)^2 = \dots = \\ &= \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} + \frac{4}{2 \cdot \sin x \cdot \cos x} = 4 \cdot \left( \frac{1}{\sin^2 2x} + \frac{1}{\sin 2x} \right) \geq 8. \end{aligned}$$

c)  $c_{\min} = 2 \cdot \sqrt{2} + 2$ , ezt akkor veszi fel, ha  $x = \frac{\pi}{4}$ . Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget a pozitív  $\frac{1}{\sin x}$  és  $\frac{1}{\cos x}$ -re! Kapjuk, hogy  $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \geq \frac{2}{\sqrt{\sin x \cdot \cos x}}$ . Itt egyenlőség akkor és csak akkor van, ha  $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$ . Mutassuk meg,

$$\text{hogy ez } x = \frac{\pi}{4}\text{-nél teljesül! Tehát } c(x) \geq \frac{2}{\sqrt{\sin x \cdot \cos x}} + \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} = \dots = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2x}} + \frac{2}{\sin 2x} \geq 2 \cdot \sqrt{2} + 2.$$

d)  $d_{\min} = 2 \cdot \sqrt{2} + 4$ , ezt  $x = \frac{\pi}{4}$ -nél veszi fel. Hasonlóan járhatunk el, mint az előző feladat megoldásánál. e) A kifejezés minimuma  $2 \cdot \sqrt{2} + 2$  és ezt  $x = \frac{\pi}{4}$ -nél veszi fel.

A kifejezést hozzuk a következő alakúra:  $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$ . Alkalmazzuk az első két tagra a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget, kapjuk hogy  $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{\cos x \cdot \sin x}} + \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2x}} + \frac{2}{\sin 2x} \geq 2 \cdot \sqrt{2} + 2$ .

**3391.**  $K_{\max} = \frac{n}{2}$  és ezt  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{\pi}{4}$ -nél veszi fel. Alkalmazzuk az  $a \cdot b \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$

ismert és könnyen igazolható egyenlőtlenséget!  $\sin x_1 \cdot \cos x_2 \leq \frac{\sin^2 x_1 + \cos^2 x_2}{2}$ ,  $\sin x_2 \cdot \cos x_3 \leq \frac{\sin^2 x_2 + \cos^2 x_3}{2}$ , ...,  $\sin x_{n-1} \cdot \cos x_n \leq \frac{\sin^2 x_{n-1} + \cos^2 x_n}{2}$ ,  $\sin x_n \cdot \cos x_1 \leq \frac{\sin^2 x_n + \cos^2 x_1}{2}$ .

Adjuk össze ezen egyenlőtlenségeket, kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} K &\leq \frac{1}{2} \cdot \left( (\sin^2 x_1 + \cos^2 x_1) + (\sin^2 x_2 + \cos^2 x_2) + \dots + (\sin^2 x_n + \cos^2 x_n) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (1 + 1 + \dots + 1) = \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

**3392.** a)  $a_{\max} = \frac{1}{8}$  és ezt  $x = \frac{\pi}{3}$ -nál veszi fel.  $a(x) = \cos x \cdot \cos x \cdot \left(\frac{3}{2} - 2 \cdot \cos x\right)$ . Alkalmazzuk e három tényezőre a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget!

$$\sqrt[3]{\cos x \cdot \cos x \cdot \left(\frac{3}{2} - 2 \cdot \cos x\right)} \leq \frac{\cos x + \cos x + \frac{3}{2} - 2 \cdot \cos x}{3}. \text{ Ebből következik, hogy } a(x) \leq \frac{1}{8}.$$

## IV

Egyenlőség akkor és csak akkor van, ha  $\cos x = \frac{3}{2} - 2 \cdot \cos x$ . b)  $b_{\max} = \frac{8}{27}$ , ezt akkor veszi fel

a függvény, amikor  $x = \arccos \frac{2}{3} \approx 0,8411$ .  $b(x) = \cos x \cdot \cos x \cdot (2 - 2 \cdot \cos x)$ , ezután hasonlóan

járjunk el, mint az előző feladatnál. c)  $c_{\max} = \frac{8}{27}$ , és ezt akkor veszi fel, ha  $x = \arcsin \frac{2}{3} \approx 0,7297$ .

Hasonlóan oldhatjuk meg, mint az előző két feladatot. A következőkben is  $k, l, m, n, p, q, u, v$  tetszőleges egész számokat jelentenek.

## Trigonometrikus egyenletrendszerek

**3393.**  $x = (k - l) \cdot \frac{\pi}{2}; \quad y = (k + l) \cdot \frac{\pi}{2}.$

**3394.** a) 
$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_1 = \frac{\pi}{2} + l \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{3 \cdot \pi}{2} + m \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_2 = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi. \end{cases} \quad \text{Adjuk össze az egyenletrendszert!}$$

b) 
$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_1 = l \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -\frac{\pi}{4} + m \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_2 = n \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \frac{3 \cdot \pi}{4} + p \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_3 = q \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -\frac{3 \cdot \pi}{4} + u \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_4 = v \cdot \pi. \end{cases}$$

Adjuk össze az egyenletrendszert!

**3395.** a) 
$$\begin{cases} x_1 = k \cdot \pi, \\ y_1 = \frac{\pi}{4} + l \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = m \cdot \pi, \\ y_2 = \frac{3 \cdot \pi}{4} + n \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 \approx 0,2527 + p \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_3 = \frac{\pi}{2} + q \cdot \pi; \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x_4 \approx 2,8889 + u \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_4 = \frac{\pi}{2} + v \cdot \pi. \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_1 = \frac{\pi}{2} + l \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{3 \cdot \pi}{4} + m \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_2 = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi. \end{cases}$$

**3396.** a) 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi, \\ y = \frac{\pi}{6} - k \cdot \pi. \end{cases} \quad \text{Fejezzük ki a második egyenletből } y\text{-t és helyettesítsük be az első egyenletbe, majd alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt! Használjuk fel a konstans eltün-}$$

nyelést, majd alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt! Használjuk fel a konstans eltün-

tetésére az  $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$  azonosságot, majd osszuk el az egyenletet  $\cos^2 x$ -szel, amikor ez nem nulla! Kapunk  $\operatorname{tg} x$ -re egy másodfokú egyenletet. (Mutassuk meg, hogy  $\cos x$  nem lehet nulla!)

$$b) \begin{cases} x_1 = k \cdot \pi, \\ y_1 = \frac{3 \cdot \pi}{4} - k \cdot \pi; \end{cases} \begin{cases} x_2 = \frac{\pi}{4} + l \cdot \pi, \\ y_2 = \frac{\pi}{2} - l \cdot \pi. \end{cases}$$

Hasonlóan járhatunk el, mint az előző feladatban, a végén kis eltéréssel. Ugyanis a végén rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk szorzattá!

**3397.** a)  $\begin{cases} x = \frac{3 \cdot \pi}{2} + k \cdot \pi, \\ y = -\frac{\pi}{6} + k \cdot \pi. \end{cases}$  Hasonlóan kezdhetjük el, mint az előző két feladatot. A továbbiakban az összegzési tétel alkalmazása után  $\cos y$ -nal osszuk el az egyenletet (ha  $x$ -et fejeztük ki korábban)!

$$b) \begin{cases} x = \frac{2 \cdot \pi}{3} + k \cdot \pi, \\ y = \frac{\pi}{6} - k \cdot \pi. \end{cases} \quad c) \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \\ y = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi. \end{cases} \quad d) \begin{cases} x = \frac{5 \cdot \pi}{60} + k \cdot \pi, \\ y = \frac{3 \cdot \pi}{4} - k \cdot \pi. \end{cases}$$

**3398.** a)  $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi, \\ y_1 = 0 + k \cdot \pi; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 0 + l \cdot \pi, \\ y_2 = -\frac{\pi}{3} + l \cdot \pi. \end{cases}$

Fejezzük ki  $x$ -et az első egyenletből és helyettesítsük be a második egyenletbe! Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt, szorozzunk a nevezővel, rendezzük nullára az egyenletet, majd alakítsuk szorzattá!

$$b) \begin{cases} x_1 = \frac{7 \cdot \pi}{12} + k \cdot \pi, \\ y_1 = -\frac{5 \cdot \pi}{60} + k \cdot \pi; \end{cases} \begin{cases} x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{12} + l \cdot \pi, \\ y_2 = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi. \end{cases}$$

Hasonlóan kezdhetjük el, mint az előzőeket, itt  $\operatorname{tg} y$ -ra másodfokú egyenletet kapunk. c) Az egyenletrendszernek nincs megoldása a valós szám párok halmazán. Hasonló módszerrel oldhatjuk meg, mint az előzőt. d) Az egyenletrendszernek nincs megoldása a valós szám párok halmazán.

**3399.**  $\begin{cases} x_1 = k \cdot \pi, \\ y_1 = l \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases} \begin{cases} x_2 = \frac{\pi}{2} + m \cdot \pi, \\ y_2 = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2 \cdot \pi. \end{cases}$   $(\sin^2 x)^2 + \cos^4 x = \sin^2 y + \cos^2 y = 1$ . Másrészt a

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  azonosság négyzetre emelése után kaphatjuk, hogy  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x$ . Így  $1 - 2 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1$ . Folytassuk!

$$3400. \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}, \\ y_1 = \frac{\pi}{4} + l \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}, \\ y_2 = \frac{3 \cdot \pi}{4} + m \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}, \\ y_3 = -\frac{\pi}{4} + n \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}, \\ y_4 = \frac{5 \cdot \pi}{4} + p \cdot 2 \cdot \pi \end{cases}$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = \dots = \frac{1}{4} \cdot (\sin^2 y + \cos^2 y) = \frac{1}{4}. \quad \text{Így} \quad \begin{cases} \sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}, \\ \sin^3 x = \frac{1}{2} \cdot \sin y. \end{cases}$$

IV

Használjuk fel, hogy  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$  és  $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ , ezeket beírva az előbbi egyenletrendszer első egyenletébe, majd rendezve az egyenletet, azt kapjuk, hogy  $\cos 2x = 0$ .

$$3401. \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi, \\ y_1 = l \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 \approx 1,1071 + m \cdot \pi, \\ y_2 = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi. \end{cases} \quad \text{Vegyük figyelembe, hogy az első egyenlet a}$$

következő alakra hozható:  $\sin(x + y) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (x - y)\right)$ .

$$3402. \quad a) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{11 \cdot \pi}{12} + k \cdot \pi, \\ y_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{3 \cdot \pi}{4} + l \cdot \pi, \\ y_2 = \frac{5 \cdot \pi}{60} + l \cdot \pi. \end{cases}$$

Fejezzük ki az első egyenletből  $x$ -et, majd ezt helyettesítsük be a második egyenletbe! Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételt, majd szorozzunk a nevezővel és  $tg y$ -ra kapunk egy másodfokú egyenletet.

$$b) \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{\pi}{12} + k \cdot \pi, \\ y_1 = \frac{17 \cdot \pi}{12} - k \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi, \\ y_2 = \frac{19 \cdot \pi}{12} - l \cdot \pi. \end{cases}$$

$$3403. \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + 2 \cdot l \cdot \frac{\pi}{3}, \\ y = \frac{2 \cdot \pi}{9} + 2 \cdot l \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}. \end{cases}$$

$$3404. \quad \begin{cases} x_1 = \frac{5 \cdot \pi + \sqrt{25 \cdot \pi^2 - 16}}{4}, \\ y_1 = \frac{5 \cdot \pi - \sqrt{25 \cdot \pi^2 - 16}}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{5 \cdot \pi - \sqrt{25 \cdot \pi^2 - 16}}{4}, \\ y_2 = \frac{5 \cdot \pi + \sqrt{25 \cdot \pi^2 - 16}}{4}. \end{cases}$$

Az első egyenletből kaphatjuk, hogy  $x \cdot y = 1$ . A második egyenletet rendezzük át úgy, hogy az 1 magányosan álljon a jobb oldalon! Majd alkalmazzuk a bal oldalra a megfelelő összegzési tételt! Vegyük majd figyelembe a megoldásnál, hogy  $x > 0$  és  $y > 0$ , ezért az összegük is pozitív.

$$3405. \quad \begin{cases} x_1 = \frac{3 \cdot \pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_1 = \frac{\pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -\frac{3 \cdot \pi}{4} + m \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_2 = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \frac{3 \cdot \pi}{4} + p \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_3 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + q \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = -\frac{3 \cdot \pi}{4} + u \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_4 = -\frac{5 \cdot \pi}{6} + v \cdot 2 \cdot \pi. \end{cases} \quad \text{A második egyenletből határozzuk meg } x\text{-et és ezt helyettesítsük be az}$$

első egyenletbe!

$$3406. \quad \begin{cases} x = -1, \\ y = -1, \\ z = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi. \end{cases} \quad \text{Fejazzuk ki az első egyenletből } y\text{-t és helyettesítsük be a második}$$

egyenletbe! Szorozzunk a nevezővel és kapunk  $x$ -re egy másodfokú egyenletet. Ennek akkor és csak akkor van valós megoldása, ha a diszkriminánsa nemnegatív.

$$3407. \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \\ y_1 = -\frac{\pi}{3} + l \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \\ y_2 = -\frac{\pi}{3} + m \cdot \pi. \end{cases} \quad \text{Használjuk fel, hogy } \cos 2x = 1 - 2 \cdot \sin^2 x \text{ és}$$

$\cos 2y = 2 \cdot \cos^2 y - 1$ . Ezeket behelyettesítve, kapjuk, hogy  $\sin^2 x - \cos^2 y = \frac{3}{4}$ , ezt alakítsuk

szorzattá, majd használjuk fel a másik egyenletet és kapjuk, hogy:  $\sin x + \cos y = \frac{3}{2}$ . Oldjuk

$$\text{meg a } \begin{cases} \sin x - \cos y = \frac{1}{2}, \\ \sin x + \cos y = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ egyenletrendszert!}$$

$$3408. \quad \begin{cases} x_1 = k \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_1 = k \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{\pi}{2} + l \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_2 = \frac{\pi}{4} + l \cdot \pi. \end{cases} \quad \text{Az első egyenletből kapjuk, hogy } x = 2 \cdot y, \text{ ezt he-}$$

lyettesítsük be a második egyenletbe és oldjuk meg az egyenletet!

$$3409. \quad a) \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi, \\ y = \frac{\pi}{12} - k \cdot 2 \cdot \pi. \end{cases} \quad \text{A második egyenletet alakítsuk át a következő módon:}$$

$$2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

$$b) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_1 = \frac{\pi}{2} - k \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \pi + l \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_2 = -\frac{\pi}{3} - l \cdot 2 \cdot \pi. \end{cases} \quad \text{Fejazzuk ki az első egyenletből } y\text{-t és helyettesít-}$$

sük be a második egyenletbe, alkalmazzunk egy megfelelő összegzési tételt, majd rendezés után osszuk el az egyenletet  $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ -mal!

$$3410. \quad a) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + k \cdot 2\pi, \\ y_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -\frac{5 \cdot \pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_2 = -\frac{7 \cdot \pi}{6} + l \cdot 2 \cdot \pi. \end{cases} \quad \text{Hasonló módon is megoldhatjuk,}$$

IV

mint az előző feladatot.

$$b) \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2 \cdot \pi, \\ y = \frac{\pi}{12} + k \cdot 2 \cdot \pi. \end{cases} \quad c) \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi, \\ y = \frac{2 \cdot \pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi. \end{cases} \quad d) \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi, \\ y = \frac{\pi}{6} - k \cdot 2 \cdot \pi. \end{cases}$$

$$3411. \quad a) \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + (k + l) \cdot \pi, \\ y = \frac{\pi}{6} + (k - l) \cdot \pi. \end{cases} \quad \text{Adjuk össze a két egyenletet, majd alkalmazzuk a megfelelő}$$

$$\text{összegzési tételt! } b) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{3} + (k + l) \cdot \pi, \\ y_1 = \frac{\pi}{3} + (l - k) \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -\frac{\pi}{3} + (k + l) \cdot \pi, \\ y_2 = -\frac{\pi}{3} + (k - l) \cdot \pi. \end{cases} \quad \text{Használjuk fel a tangens}$$

definícióját! Majd az első egyenletet használjuk fel a második egyenlet átalakításában és kapjuk, hogy:  $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{4}$ .

Ezt adjuk össze először az első egyenlettel, majd másodszor pedig vonjuk ki belőle az első egyenletet, kapjuk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y = 1 \\ \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}. \end{cases} \quad \text{Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételket, majd oldjuk}$$

$$\text{meg az egyenletrendszert! } c) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{5 \cdot \pi}{12} + (k + l) \cdot \pi, \\ y_1 = \frac{5 \cdot \pi}{60} + (k - l) \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{7 \cdot \pi}{12} + (k + l) \cdot \pi, \\ y_2 = -\frac{5 \cdot \pi}{60} + (k - l) \cdot \pi. \end{cases} \quad \text{Először ad-}$$

juk össze a két egyenletet, majd másodszor vonjuk ki egymásból a két egyenletet! Ekkor egy újabb egyenletrendszert kapunk. Alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételket és ekkor ismét

$$\text{újabb egyenletrendszert kapunk, amelyet már könnyen megoldhatunk. } d) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{5 \cdot \pi}{12} + (k + l) \cdot \pi, \\ y_1 = \frac{\pi}{3} + (l - k) \cdot \pi; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -\frac{\pi}{3} + (k + l) \cdot \pi, \\ y_2 = -\frac{5 \cdot \pi}{12} + (k - l) \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \frac{\pi}{3} + (k + l) \cdot \pi, \\ y_3 = \frac{5 \cdot \pi}{12} + (k - l) \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \frac{5 \cdot \pi}{12} + (k + l) \cdot \pi, \\ y_4 = -\frac{\pi}{3} + (k - l) \cdot \pi. \end{cases} \quad \text{Hasonlóan}$$

oldhatjuk meg, mint az előző feladatot.

$$3412. \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_1 = \frac{\pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_2 = -\frac{\pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -\frac{\pi}{3} + n \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_3 = \frac{\pi}{3} + l \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = -\frac{\pi}{3} + n \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_4 = -\frac{\pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi. \end{cases}$$

Az első egyenletet alakítsuk át a következő alakúra a megfelelő azonos-

ság segítségével:  $\frac{1}{2} \cdot (\cos x + \cos y) = \frac{1}{2}$ . Fejezzük ki innen például  $\cos y$  értékét és helyettesítsük be a második egyenletbe!

$$3413. \quad a) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_2 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \frac{\pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_3 = -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = \frac{2 \cdot \pi}{3} + m \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_4 = -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_5 = -\frac{\pi}{3} + p \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_5 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + n \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_6 = -\frac{\pi}{3} + p \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_6 = -\frac{5 \cdot \pi}{6} + n \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_7 = \frac{4 \cdot \pi}{3} + p \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_7 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + n \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_8 = \frac{4 \cdot \pi}{3} + p \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_8 = -\frac{5 \cdot \pi}{6} + n \cdot 2 \cdot \pi. \end{cases}$$

Alkalmazzuk a következő azonosságokat:  $\cos 2x = 1 - 2 \cdot \sin^2 x$ ;

$\cos 2y = 2 \cdot \cos^2 y - 1$ . Ezeket felhasználva az első egyenletből a következőt kapjuk:  $\sin^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{2}$ . Oldjuk meg a második egyenletből és az új egyenletből kapott egyenlet-

rendszert!  $b) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{4} + (k+m) \cdot \pi, \\ y_1 = -\frac{\pi}{12} + (k-m) \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -\frac{\pi}{12} + (k+m) \cdot \pi, \\ y_2 = \frac{\pi}{4} + (k-m) \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \frac{7 \cdot \pi}{12} + (p+m) \cdot \pi, \\ y_3 = -\frac{5 \cdot \pi}{12} + (p-m) \cdot \pi; \end{cases}$

$$\begin{cases} x_4 = \frac{\pi}{4} + (p+m) \cdot \pi, \\ y_4 = \frac{7 \cdot \pi}{12} + (p-m) \cdot \pi. \end{cases}$$

A második egyenletet a következő alakra hozhatjuk a szinuszosz-

összegének szorzattá alakítására való azonosság segítségével:  $2 \cdot \sin \frac{2x+2y}{2} \cdot \cos \frac{2x-2y}{2} = \frac{1}{2}$ ,

ebből az első egyenlet felhasználásával kapjuk, hogy:  $\cos(x-y) = \frac{1}{2}$ .

$$3414. \quad a) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{5 \cdot \pi}{12} + (m+n) \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_1 = \frac{\pi}{4} + (n-m) \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -\frac{\pi}{4} + (n+m) \cdot \pi, \\ y_2 = -\frac{5 \cdot \pi}{12} + (n-m) \cdot \pi; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = \frac{17 \cdot \pi}{12} + (m+n) \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_3 = -\frac{3 \cdot \pi}{4} + (n-m) \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \frac{3 \cdot \pi}{4} + (m+n) \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_4 = -\frac{17 \cdot \pi}{12} + (n-m) \cdot 2 \cdot \pi. \end{cases} \quad \text{Mindkét egyenletet alakítsuk}$$

át a megfelelő azonosságok segítségével a következő alakúra:  $2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ;  $2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ . Osszuk el egymással a két új egyenletet

IV

és kapjuk, hogy:  $\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = 2 - \sqrt{3}$ . b)  $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{3} + (n+m) \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_1 = \frac{\pi}{6} + (m-n) \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{\pi}{6} + (m+n) \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_2 = \frac{\pi}{3} + (m-n) \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases}$

$$\begin{cases} x_3 = \frac{13 \cdot \pi}{6} + (m+p) \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_3 = \frac{\pi}{3} + (m-p) \cdot 2 \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \frac{\pi}{3} + (m+p) \cdot 2 \cdot \pi, \\ y_4 = \frac{13 \cdot \pi}{6} + (m-p) \cdot 2 \cdot \pi. \end{cases}$$

$$\mathbf{3415.} \quad a) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{3} + (m+n) \cdot \pi, \\ y_1 = \frac{5 \cdot \pi}{60} + (m-n) \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{60} + (m+n) \cdot \pi, \\ y_2 = \frac{\pi}{3} + (m-n) \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + (m+n) \cdot \pi, \\ y_3 = \frac{7 \cdot \pi}{12} + (m-n) \cdot \pi; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = \frac{7 \cdot \pi}{12} + (m+n) \cdot \pi, \\ y_4 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + (m-n) \cdot \pi. \end{cases} \quad \text{Használjuk fel a tangens és a kotangens definícióját! Legyen } a = 2 \text{ és}$$

$b = 2 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}\right)$ . Ekkor az első egyenletet a következő alakra hozhatjuk:

$\sin(x+y) = a \cdot \cos x \cdot \cos y$ . Míg a második egyenletet a következő alakra hozhatjuk:  $\sin(x+y) = b \cdot \sin x \cdot \sin y$ . Ezeket alakítsuk át még a következő módon:

$$(1) \quad \sin(x+y) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \cos(x-y) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \cos(x+y) \text{ és}$$

$$(2) \quad \sin(x+y) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \cos(x-y) - \frac{1}{2} \cdot b \cdot \cos(x+y). \text{ Az (1) egyenletet szorozzuk } b\text{-vel, a (2) egyenletet szorozzuk } a\text{-val, majd a kapott első egyenletből vonjuk ki a kapott második egyenletet, kapjuk, hogy: } (b-a) \cdot \sin(x+y) = a \cdot b \cdot \cos(x+y), \text{ ebből (*)} \operatorname{tg}(x+y) = \frac{a \cdot b}{b-a}.$$

Ha most összeadjuk a  $b$ -vel, illetve  $a$ -val való szorzás után kapott egyenleteket, akkor azt kapjuk, hogy (\*\*)  $(a+b) \cdot \sin(x+y) = a \cdot b \cdot \cos(x-y)$ . A (\*) és (\*\*) egyenletekből álló egyenletrendszert már könnyebben megoldhatjuk, főleg, ha visszahelyettesítjük  $a$ , illetve  $b$  értékeit.

$$b) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{4} + (n+m) \cdot \pi, \\ y_1 = -\frac{\pi}{12} + (m+n) \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{12} + (m+n) \cdot \pi, \\ y_2 = -\frac{\pi}{4} + (m-n) \cdot \pi; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = \frac{3 \cdot \pi}{4} + (m+n) \cdot \pi, \\ y_3 = \frac{5 \cdot \pi}{12} + (m-n) \cdot \pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \frac{11 \cdot \pi}{12} + (m+n) \cdot \pi, \\ y_4 = \frac{\pi}{4} + (m-n) \cdot \pi. \end{cases}$$

**3416.** a)  $\begin{cases} x = \pi + k \cdot \pi, \\ y = \frac{2 \cdot \pi}{3} - k \cdot \pi. \end{cases}$  A második egyenletet alakítsuk át a következő alakúra:

$$\frac{1}{2} \cdot (\cos(x+y) + \cos(x-y)) = \frac{1}{4} \cdot (1 + \sqrt{3}). \quad b) \begin{cases} x = \frac{5 \cdot \pi}{6} + k \cdot \pi, \\ y = -\frac{5 \cdot \pi}{60} - k \cdot \pi. \end{cases} \quad \text{Alakítsuk át a második}$$

egyenletet a következő alakúvá:  $\frac{1}{2} \cdot (\cos(x-y) - \cos(x+y)) = \frac{3 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{6}}{8}$ .

**3417.** a)  $\begin{cases} x = \frac{3 \cdot \pi}{4} + k \cdot \pi, \\ y = \frac{\pi}{12} - k \cdot \pi. \end{cases}$  b)  $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{4} - k \cdot \pi, \\ y_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi; \end{cases}$   $\begin{cases} x_2 = -\frac{\pi}{3} - m \cdot \pi, \\ y_2 = \frac{3 \cdot \pi}{4} + m \cdot \pi. \end{cases}$

**3418.** a)  $\begin{cases} x_1 = k \cdot \pi, \\ y_1 = \frac{\pi}{3} - k \cdot \pi; \end{cases}$   $\begin{cases} x_2 = \frac{\pi}{3} + l \cdot \pi, \\ y_2 = -l \cdot \pi. \end{cases}$  b)  $\begin{cases} x = \frac{3 \cdot \pi}{4} + k \cdot \pi, \\ y = \frac{\pi}{12} - k \cdot \pi. \end{cases}$

**3419.**  $\begin{cases} x_1 = k \cdot \pi, \\ y_1 = \frac{\pi}{4} - k \cdot \pi; \end{cases}$   $\begin{cases} x_2 = \frac{\pi}{2} + m \cdot \pi, \\ y_2 = \frac{\pi}{4} - m \cdot \pi. \end{cases}$

**3420.** a)  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi, \\ y = \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi. \end{cases}$  b)  $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \\ y_1 = \frac{\pi}{3} - k \cdot \pi; \end{cases}$   $\begin{cases} x_2 = \frac{\pi}{3} + m \cdot \pi, \\ y_2 = \frac{\pi}{2} - m \cdot \pi. \end{cases}$

**3421.** a)  $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi, \\ y_1 = \frac{\pi}{3} - k \cdot \pi; \end{cases}$   $\begin{cases} x_2 = \frac{5 \cdot \pi}{6} + m \cdot \pi, \\ y_2 = -\frac{\pi}{3} - m \cdot \pi. \end{cases}$  b)  $\begin{cases} x = \frac{1}{6} + k, \\ y = -\frac{1}{6} + k. \end{cases}$

**3422.**  $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{3} + (m+k) \cdot \pi, \\ y_1 = \frac{\pi}{3} + (m-k) \cdot \pi; \end{cases}$   $\begin{cases} x_2 = -\frac{\pi}{3} + (m+k) \cdot \pi, \\ y_2 = -\frac{\pi}{3} + (m-k) \cdot \pi. \end{cases}$  Alkalmazzuk a tangens definíció-

ját, ekkor kapjuk a második egyenletből, hogy  $4 \cdot \cos x \cdot \cos y = 1$ , ha felhasználjuk közben az első egyenletet is. Adjuk össze az új egyenletet az első egyenlettel, kapjuk, hogy  $\cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y = 1$ . Ezután a korábban kapott egyenletből most vonjuk le az első egyenletet, kapjuk, hogy:  $\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}$ .

Majd alkalmazzuk a megfelelő összegzési tételeket és a kapott új egyenletrendszert már könnyen megoldhatjuk.

$$\begin{aligned} x &= (k - n + m) \cdot \pi \\ \mathbf{3423.} \quad y &= (n + k - m) \cdot \pi \\ z &= (1 + 6 \cdot n - k - m) \cdot \pi \end{aligned}$$

harmadik egyenletet! Kapjuk, hogy  $\sin x + \sin y - \sin z + \sin(x + y + z) = 0$ .

$(\sin x + \sin y) + (\sin(x + y + z) - \sin z) = 0$ . Alakítsuk szorzattá a zárójeles kifejezéseket:

$$2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} + 2 \cdot \cos \frac{x+y+z+z}{2} \cdot \sin \frac{x+y+z-z}{2} = 0,$$

$$\sin \frac{x+y}{2} \cdot \left( \cos \frac{x-y}{2} + \cos \frac{x+y+2 \cdot z}{2} \right) = 0. \text{ Alakítsuk szorzattá a zárójeles kifejezést! Kis}$$

átalakítás után kapjuk, hogy  $\sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x+z}{2} \cdot \cos \frac{y+z}{2} = 0$ . Ebből előbb-utóbb:  $x + y = k \cdot 2 \cdot \pi$ ;  $x + z = \pi + m \cdot 2 \cdot \pi$ ;  $y + z = \pi + n \cdot 2 \cdot \pi$ . Oldjuk meg a kapott egyszerű egyenletrendszert!

## IV

## Néhány nehezebb trigonometriai feladat

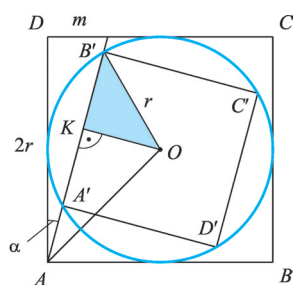
$\mathbf{3424.} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = l \cdot 2 \cdot \pi \end{cases}$ . Gondoljuk meg, hogy  $3^x + 3^{-x} \leq 2$ . Alkalmazzuk a negatív kitevőjű hatvány definícióját, szorozzunk a nevezővel, rendezzük nullára és oldjuk meg a  $3^x$ -re másodfokú egyenlőtlenséget! Vegyük észre, hogy teljes négyzetet alakíthatunk ki:  $(3^x - 1)^2 \leq 0$ , ebből következik, hogy  $3^x = 1$ , azaz  $x = 0$ .

$\mathbf{3425.}$  A háromszög oldalai 4; 5; 6 egységnyiek, a szögei  $\approx 41,4^\circ$ ;  $\approx 55,8^\circ$ ;  $\approx 82,8^\circ$ . Legyen az  $n - 1$  hosszúságú oldallal szemközti szög  $x$ , az  $n + 1$  hosszúságú oldallal szemközti szög  $2 \cdot x$ , ekkor az  $n$  hosszúságú oldallal szemközti szög  $180^\circ - 3 \cdot x$ . A szinusztételt alkalmazva  $\frac{n+1}{n-1} = \frac{\sin 2x}{\sin x}$ , ebből előbb-utóbb  $\cos x = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n-1}$ . Alkalmazzuk a koszinusztételt!

$$(n-1)^2 = n^2 + (n+1)^2 - 2 \cdot n \cdot (n+1) \cdot \cos x. \text{ Ebből } \cos x = \frac{n+4}{2 \cdot (n+1)}$$

cos  $x$ -re kapott két egyenletet, akkor azt kaphatjuk a kapott egyenlet megoldása után, hogy  $n = 5$ .

**3426.**



$\mathbf{3426.}$  Legyen  $K$  az  $A'B'$  szakasz felezőpontja,  $OK = \frac{r}{\sqrt{2}}$ ,

$$\frac{OK}{OA} = \sin \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right), \quad r = 1. \text{ Ezekből } \alpha = 45^\circ - 30^\circ (= 15^\circ). \quad \frac{m}{2 \cdot r} =$$

$$= \operatorname{tg} \alpha, \text{ és így } t = \frac{2 \cdot r \cdot m}{2} = 2 \cdot r^2 \cdot \operatorname{tg} \alpha = 2 \cdot r^2 \cdot \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ} =$$

$$= \dots = 2 \cdot (2 - \sqrt{3}).$$